

柯宝贵, 赵予菲, 徐凡凡, 赵翠, 李泰航. 2025. 航空重力异常数据稳定高精度向下延拓方法研究[J]. 地球与行星物理论评 (中英文), 56(3): 264-277. doi: [10.19975/j.dqyxx.2024-030](https://doi.org/10.19975/j.dqyxx.2024-030).

Ke B G, Zhao Y F, Xu F F, Zhao C, Li T H. 2025. Study on the stable and high-precision downward extension method of airborne gravity anomaly data[J]. Reviews of Geophysics and Planetary Physics, 56(3): 264-277 (in Chinese). doi:[10.19975/j.dqyxx.2024-030](https://doi.org/10.19975/j.dqyxx.2024-030).

航空重力异常数据稳定高精度向下延拓方法研究

柯宝贵^{1,2}, 赵予菲^{1,3}, 徐凡凡¹, 赵翠^{4*}, 李泰航³

1 中国测绘科学研究院, 北京 100036

2 华中科技大学 精密重力测量研究设施, 武汉 430074

3 兰州交通大学 测绘与地理信息学院, 兰州 730070

4 北京联合大学 应用科技学院, 北京 102200

摘要: 航空重力异常向下延拓的本质是求解第一类 Fredholm 方程, 属于不适定性的问题. 稳定高精度向下延拓方法一直以来都是该领域的研究热点. 为抑制边缘效应和提升计算效率, 分别对所用数据进行扩边和快速傅里叶变换处理. 为增大向下延拓距离、提高稳定性和延拓精度, 利用模拟重力异常数据和实测航空重力数据对比分析了积分迭代法、Tikhonov 正则化迭代法、Barzilai-Borwein 法、迭代最小二乘法和半迭代方法、改进的共轭梯度法向残差法等六种向下延拓方法. 结果表明: 在数据没有噪声的理想情况下, Barzilai-Borwein 法的收敛速度最快, 且初始延拓均方误差值低, 延拓精度高, 优势明显. 迭代最小二乘法不够稳定. Tikhonov 正则化迭代方法在达到延拓稳定前, 经历了误差增加的状态, 且初始均方误差值较高, 而其余的几种方法延拓效果类似较为一般. 在模拟数据中添加噪声后, 改进的共轭梯度法向残差法, 对噪声的抑制效应最好. 且该方法在实际数据向下延拓的过程中, 能够实现稳定向下延拓, 延拓精度优于其他五种延拓方法.

关键词: 航空重力数据; 向下延拓; 频率域; 共轭梯度法向残差法; 积分迭代法

doi: [10.19975/j.dqyxx.2024-030](https://doi.org/10.19975/j.dqyxx.2024-030)

中图分类号: P312

文献标识码: A

Study on the stable and high-precision downward extension method of airborne gravity anomaly data

Ke Baogui^{1,2}, Zhao Yufei^{1,3}, Xu Fanfan¹, Zhao Cui^{4*}, Li Taihang³

1 Chinese Academy of Surveying and Mapping, Beijing 100036, China

2 National Precise Gravity Measurement Facility, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, China

3 Faculty of Geomatics, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, China

4 College of Applied Science and Technology, Beijing Union University, Beijing 102200, China

Abstract: The essence of the downward continuation of airborne gravity anomalies is to solve the first kind of Fredholm integral equation, which is an ill-posed problem. Stable and high-precision downward continuation methods have always been a research hotspot in this field. This research has been conducted on data expansion to suppress edge effects and enhance computational efficiency through the use of the fast Fourier transform. To increase the depth of downward continuation, improve stability, and enhance continuation accuracy, six downward continuation methods—the integral iterative method, Tikhonov regularization iterative method, Barzilai-Borwein (BB) method, iterative least squares method, semi-iterative method, and conjugate gradient normal residual (CGNR)

收稿日期: 2024-08-02; 录用日期: 2024-08-19

基金项目: 中央级公益性科研院所基本科研业务费 (AR2404); 北京联合大学科研资助项目 (ZK20202204)

Supported by the Basic Research Fund for Central Public Research Institutes (Grant No. AR2404), and the Academic Research Projects of Beijing Union University (Grant No. ZK20202204)

第一作者: 柯宝贵 (1982-), 男, 研究员, 主要从事大地测量与地球动力学研究. E-mail: kebaogui@163.com

*通信作者: 赵翠 (1986-), 女, 讲师, 主要从事人工智能+的研究. E-mail: yktzhacui@buu.edu.cn



method—were comparatively analyzed using simulated and actual airborne gravity anomaly data. The results indicated that the BB method has the fastest convergence rate under the ideal condition of no noise in the data, with a low initial mean square error of continuation and high accuracy, thus showing a clear advantage. The iterative least squares method is insufficiently stable. The Tikhonov regularization iterative method produces an increase in error before reaching a stable continuation state, and it has a relatively high initial mean square error with a continuation effect that is generally similar to that of the other methods. After adding noise to the simulated data, the improved CGNR method showed the best noise suppression effect. Moreover, this method is capable of achieving stable downward continuation in the process of actual data continuation, with a continuation accuracy that is superior to that of the other five methods.

Keywords: airborne gravimetric data; downward continuation; frequency domain; conjugate gradient normal residual method; integral iterative method

0 引言

航空重力向下延拓是将航线高度处的重力异常数据延拓到大地水准面或地面的过程 (侯重初, 1982; Jekeli, 1981; Kern et al., 2003; Sjöberg, 2003)。目前多采用球外 Poisson 积分法、正则化算法、积分迭代法、梯度法、最小二乘配置法、点质量延拓方法、直接代表法、球内 Dirichlet 解等方法向下延拓。

一般而言, 向下延拓方法可分为空间域和频率域两种。频率域向下延拓因子表现出了高通滤波器的特性, 高频噪声会引起较大的震荡, 稳定性低, 能稳定向下延拓 3 至 5 倍点距; 空间域延拓方法则具有计算效率低的局限性。徐世浙 (2006) 提出了积分迭代法将起伏面上的实际位场投影到水平面上获得水平面初始值, 用积分方法计算起伏面上的场值。用起伏面的实测场值与计算值的差值对水平面位场校正, 经过反复迭代, 直到起伏面实际值与计算得到的值误差小到满足精度要求, 该方法计算效率较快, 精度较高。在此基础上, 刘东甲等 (2009) 将其进行改进, 在频率域中进行迭代, 该方法迭代收敛且更加简单快速。张志厚 (2013) 通过相关系数法求解已知场和未知场的相关系数的 Fredholm 积分方程, 在空间域中实现了位场的向下延拓方法, 并通过 Krylov 子空间的方法求解向下延拓问题, 延拓效果较好。陈欣等 (2018) 引入了基于广义交叉验证方法的 Tikhonov 正则化方法, 该方法基于全局协方差模型建立航空重力数据与地面重力数据的协方差关系, 改善了协方差矩阵的病态性, 抑制噪声在延拓过程中的扩大。刘晓刚等 (2018) 提出了一种新的改进泊松积分迭代法的延拓模型, 修正了传统 Poisson 积分离散化误差给延

拓模型带来的病态性影响, 同时也抑制了延拓模型本身的病态性。伍丰等 (2020) 提出了半参数核估计和正则化方法结合的逆泊松延拓方法, 该方法对于病态性改善方面具有一定效果, 且在缺少外部数据时能保持很好的延拓精度。徐新强和赵俊 (2020) 介绍了一种多参数正则化方法, 以均方误差最小为目标函数, 设计了选取正则化参数的迭代算法, 向下延拓结果稳定可靠。Pitonák 等 (2020) 提出了卫星和航空重力数据的谱域向下延拓方法, 满足了不规则的地面区域的需求。黄漠涛等 (2022) 提出了向上延拓积分严密改化模型, 提出了补偿传统改化模型的修正公式, 可提高重力异常向上延拓的计算精度。赵予菲和柯宝贵 (2022) 指出迭代的延拓方法具有延拓稳定的优势。本文将采用共轭梯度法向残差法 (conjugate gradient normal residual method, CGNR)、积分迭代法、Tikhonov 正则化迭代法、Barzilai-Borwein 法、迭代最小二乘法、半迭代 v 方法进行实验, 并从延拓精度、计算效率、误差抑制效应等方面进行对比, 实现航空重力异常数据稳定高精度向下延拓。

1 向下延拓技术方法

1.1 空间域向下延拓基本原理

空间域内, 离散的重力异常数据进行向上延拓的基本公式为 (陈欣等, 2018):

$$u_0(x, y) = \frac{h}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u_h(\zeta, \eta)}{[(x-\zeta)^2 + (y-\eta)^2 + h^2]^{3/2}} d\zeta d\eta \quad (1)$$

式中: $u_0(x, y)$ 为上层重力场的空间坐标; $u_h(\zeta, \eta)$ 为下层重力场的空间坐标; h 为延拓的高度, 假设上

层重力位场的高程为 0, 即 $z=0$, 则其位场为:

$$u(x, y, z)|_{z=0} = u_0(x, y) \quad (2)$$

下层重力位场为 (z 轴方向竖直向下, $z=h>0$):

$$u(x, y, z)|_{z=h} = u_h(x, y) \quad (3)$$

将式 (1) 表示为褶积的形式, 为方便计算, 将向上延拓公式表示为褶积的形式:

$$u_0(x, y) = u_h(x, y) * \varphi(x, y) \quad (4)$$

$\varphi(x, y)$ 为核函数可以表示为:

$$\varphi(x, y) = \frac{h}{2\pi \cdot (x^2 + y^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (5)$$

向下延拓则是对式 (4) 求逆的过程, 在已知 $u_0(x, y)$ 和 $\varphi(x, y)$ 的情况下, 对 $u_h(x, y)$ 进行求解的过程.

1.2 改进的共轭梯度法向残差法

共轭梯度法向残差法基于 Krylov 子空间方法向下延拓, 对噪声有良好的抑制作用 (李春光和徐成贤, 2001). 该方法最初用于解决大型方程的求解问题, 1996 年由 Saad 给出其迭代形式, 大量实验证明, CGNR 法具有良好的稳健性 (Nachtingal et al., 1992; Saad, 1988, 1996; Saylor and Smolarski, 1991).

$u_0(x, y)$ 是航空重力数据作为上层重力场, $u_h(x, y)$ 是地面数据作为下层位场, 通过 $u_0(x, y)$ 求解 $u_h(x, y)$ 就是向下延拓的过程. $u_0(x, y)$ 数据通常都是离散的格网化数据, 为了便于处理, 将式 (1) 进行离散化, 得到如下公式:

$$u_0(m\Delta x, n\Delta y) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^M \frac{h \cdot \Delta x \Delta y \cdot u_h(i\Delta x, j\Delta y)}{\{[(m-i)\Delta x]^2 + [(n-j)\Delta y]^2 + h^2\}^{\frac{3}{2}}} \quad (6)$$

式中: Δx 、 Δy 分别为 x 、 y 方向上的取样间距; M 、 N 为 x 、 y 方向上的取样总数, 可将式 (6) 简化表示为:

$$\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{B} \quad (7)$$

式中: $\mathbf{B}$ 、 $\mathbf{X}$ 含义如下:

$$\mathbf{B} = \{u_0(1, 1), u_0(2, 1), \dots, u_0(M, N)\}^T$$

$$\mathbf{X} = \{u_h(1, 1), u_h(2, 1), \dots, u_h(M, N)\}^T$$

$\mathbf{A}$ 为 $L \times L$ ($L=M \times N$) 维的对称的向下延拓系数矩阵, 矩阵 $\mathbf{A}$ 表达式为:

$$\mathbf{A}(m, n, i, j) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{h \cdot \Delta x \Delta y}{\{[(m-i)\Delta x]^2 + [(n-j)\Delta y]^2 + h^2\}^{\frac{3}{2}}} \quad (8)$$

CGNR 法的迭代过程为:

步骤 1: 令 $\mathbf{X}^{(0)} = \mathbf{B}$, $\mathbf{R}^{(0)} = \mathbf{B} - \mathbf{A}\mathbf{X}^{(0)}$, $\mathbf{Z}^{(0)} = \mathbf{A}^T \mathbf{R}^{(0)}$, $\mathbf{P}^{(0)} = \mathbf{Z}^{(0)}$

步骤 2: $\mathbf{W}^{(0)} = \mathbf{A}\mathbf{P}^{(0)}$

步骤 3: $\alpha_k = \frac{\|\mathbf{Z}^{(k)}\|_2^2}{\|\mathbf{W}^{(k)}\|_2^2}$, k 为迭代次数

步骤 4: $\mathbf{X}^{(k+1)} = \mathbf{X}^{(k)} + \alpha_k \mathbf{P}^{(k)}$

步骤 5: $\mathbf{R}^{(k+1)} = \mathbf{R}^{(k)} - \alpha_k \mathbf{W}^{(k)}$

步骤 6: $\mathbf{Z}^{(k+1)} = \mathbf{A}^T \mathbf{R}^{(k+1)}$

步骤 7: $\beta_k = \frac{\|\mathbf{Z}^{(k+1)}\|_2^2}{\|\mathbf{Z}^{(k)}\|_2^2}$

步骤 8: $\mathbf{P}^{(k+1)} = \mathbf{Z}^{(k+1)} + \beta_k \mathbf{P}^{(k)}$

在延拓过程中, 式 (7) 中 $\mathbf{A}$ 矩阵条件数较大, 因而在求该问题解的向下延拓过程中将导致数据中极小的误差产生较大的震荡 (陈龙伟等, 2007). 因此对该问题进行改进, 将求解 $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{B}$ 的问题转化为求解 $\mathbf{A}^T \mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{A}^T \mathbf{B}$ 的 CGNR 法. 通常情况下, 由于系数矩阵 $\mathbf{A}$ (L 行 $\times$ L 列) 规模较大, 空间域内计算耗时较长 (赵予菲和柯宝贵, 2022), 因此本文采用频率域的方法进行改进. 在向下延拓前应对其进行扩边处理, 从而降低边缘效应的影响, 减小误差提高延拓精度. 频率域的 CGNR 法具有很高的计算效率, 相同计算机条件下, 在计算 200×200 维度的矩阵时, 延拓时间约为 10 s, 且随着矩阵维度增加, 延拓时间变化不大, 和空间域延拓过程相比计算时间显著降低.

由公式 (7) 可知, 同对称的系数矩阵 $\mathbf{A}$ 相乘可看作对该矩阵进行向上延拓处理. 因此, 对迭代步骤中同 $\mathbf{A}$ 及 $\mathbf{A}^T$ 相乘的矩阵, 可看作对矩阵向上延拓的过程, 向上延拓是可以进行稳定求解的, 因此也间接保证了 CGNR 法延拓过程的稳健性.

1.3 迭代的延拓方法

1.3.1 积分迭代法

对式 (5) 进行傅里叶变换, 得到式 (9) (张志厚等, 2021):

$$U_0(u, v) = U_h(u, v) \phi(u, v) \quad (9)$$

式中: u 、 v 分别为 x 、 y 方向的波数; $\phi(u, v)$ 为式 (5) 中 $\varphi(x, y)$ 的傅里叶变换.

$$\phi(u, v) = e^{-h \sqrt{u^2 + v^2}} \quad (10)$$

空间域迭代过程为:

$$u_n(x, y) = u_{(n-1)}(x, y) + st [u_0(x, y) - u_{(n-1)}(x, y) \times \varphi(x, y)] \quad (11)$$

这是一种逐次逼近法, st 为迭代步长, 一般取步长 $st=1$.

1.3.2 Barzilai-Borwein 法

Barzilai-Borwein 法 (简称 BB 法) 是对积分迭代法的一种完善, 是一种变步长的积分迭代法. BB 法是一个特殊的最速下降法 (肖庭延等, 2003), 其迭代过程为 (张志厚等, 2021):

$$u_{n+1}(x, y) = u_n(x, y) + t_n p_n \quad (12)$$

$$t_n = \frac{(p_n)^T (p_n)}{(p_n)^T A (p_n)} \quad (13)$$

$$p_n = u_0(x, y) - A u_n(x, y) \quad (14)$$

由两者的迭代公式可见, BB 法针对积分迭代法的迭代步长 st 进行了改进, 积分迭代法式 (11) 中的迭代步长 st 是一个固定的值, 而 BB 法的迭代步长 t_n 由差值向量经计算得到, 更贴合实际数据情况, 步长更为合理. 式中矩阵 A 为延拓系数矩阵, 迭代步长 st 一般取值为 1, 如果取值过小会限制迭代的速度, 取值过大则会限制迭代的精度, 因此通过每次迭代的差值向量计算其迭代步长, 可以很好地提高迭代速度和延拓精度.

1.3.3 Tikhonov 正则化迭代

经过傅里叶变换的向下延拓因子对航空重力数据的高频噪声具有显著的放大效应, 迭代的正则化方法, 可以通过引入正则化因子, 解决这种不适定的问题. 正则化因子的引入主要解决在延拓过程中延拓深度较大时延拓精度低的问题 (陈欣等, 2018; 冯淑萍和高延民, 2016; 周浩等, 2022).

波数域 Tikhonov 正则化公式为:

$$U_0(u, v) = \Phi(u, v) \left[1 - \left(\frac{\alpha}{\Phi(u, v)^{-2} + \alpha} \right)^n \right] U_h(u, v) \quad (15)$$

式中 α 为正则化参数, 波数域正则化公式同波数域的积分迭代法的区别在于引入了正则化因子, 在延拓深度较大时, 仍可以保持较好的延拓精度.

1.3.4 迭代最小二乘法

迭代最小二乘法将向下延拓的问题转化成了最小二乘问题, 是一种通过梯度下降法对最小二乘问题进行迭代求解的一种方法. 迭代最小二乘法中的迭代步长有和正则化因子相似的作用, 具有抑制高频噪声的效果 (陈龙伟等, 2011). 取航空重力异常值为初值进行迭代, n 为迭代次数, p_n 为计算的残差值, 通过逐次计算 p_n , 并引入 $r_n = A u_0$ 计算其

迭代步长 $\lambda = -\frac{\langle r_n, p_n \rangle}{\langle r_n, r_n \rangle}$ ($\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示求向量内积), 进而迭代求解.

1.3.5 半迭代 ν 方法

半迭代方法也被称为多项式加速方法, 该方法 and 前面介绍的迭代方法不同, 半迭代方法不仅需要前一次迭代的计算值, 还需要前面几次迭代过程的信息. 对 Landweber 推导后可见其迭代序列的收敛速度是相当慢的, 而半迭代 ν 方法是在 Landweber 迭代法的基础上进行改进得到的, 是对 Landweber 法的加速迭代. 其中 ν 方法使得残差随迭代减小, 每步迭代, 充分利用前两步信息, 构造出加速 Landweber 方法 (陈龙伟等, 2007).

在 Landweber 方法的基础上, 选择合适的余项多项式可以显著提高多项式迭代的利用效率, 而使用太多的前面迭代信息则会导致计算时内存不足或计算效率变低, 因此选择利用前两步的信息构造出算法. 在寻找合适的余项多项式的推导过程中, 证实了存在依赖于 ν 的常数使得半迭代点列的逼近效果更好. Brakhage (1987) 构造了利用前两步迭代格式的 ν 方法, 因此该方法是一种基于半迭代方法的 ν 方法 (肖庭延等, 2003).

2 模型实验与分析

2.1 理论模型设计

为对比上述各个方法的延拓优势, 采用模拟数据进行实验. 模拟实验采用点质量方法, 在实验区域内设置 5 个点质量源, 分别模拟距离地球表面 2 km 和 1 km 两个高度的重力异常格网值, 格网数为 301×301 , 点位间隔约为 50 m. 以 2 km 高度处的重力异常作为模拟的航空重力数据即上层位场进行延拓, 1 km 处的重力异常格网作为模拟的地面数据即下层位场, 即模拟实验向下延拓约 20 倍点距, 验证向下延拓的效果. 点质量源参数设置如表 1 所示.

2.2 无误差模型数据的向下延拓分析

实验采用上述模型模拟得到的重力异常数据向下延拓. 对比分析不同延拓方法的计算效率和延拓精度. 表 2 为未加入误差的重力异常向下延拓情况对比, 实验采用均方误差 (mean square error, MSE) 和平均相对误差 (mean relative error, MRE) 两种

表 1 质量源模型参数设置

Table 1 Parameter settings of the mass source model

质量源序号	东经/(°)	北纬/(°)	埋深/km	点源质量/kg
1	151.040	24.040	0.808	1.850×10^{13}
2	151.050	24.105	0.756	1.800×10^{13}
3	151.075	24.075	0.767	1.950×10^{13}
4	151.100	24.038	0.756	1.850×10^{13}
5	151.100	24.119	0.808	-1.850×10^{13}

表 2 延拓计算耗时及精度对比

Table 2 Comparison of time and accuracy of extension calculation

延拓方法	计算耗时/ms	最小均方误差/mGal	最小平均 相对误差/mGal	2 km高度处重力 异常数据均值/mGal	1 km高度处重力 异常均值/mGal	延拓重力异常 数据均值/mGal
积分迭代法	4962	0.014	0.160	6.141	7.154	7.183
Tikhonov正则化迭代	10130	0.014	0.160	6.141	7.154	7.183
BB法	5663	0.014	0.160	6.141	7.154	7.177
迭代最小二乘法	11735	0.019	0.213	6.141	7.154	7.198
半迭代 ν 方法	8029	0.017	0.190	6.141	7.154	7.193
共轭梯度法向残差法	9183	0.015	0.169	6.141	7.154	7.113

标准来衡量延拓精度，由于每次迭代会得到 MSE 和 MRE 值，因此在迭代过程中统计了 MRE 和 MSE 的最小值作为稳定迭代后的结果. 由于边缘效应，六种方法的延拓结果在边缘处存在较大误差，并且迭代过程无法收敛，导致延拓效果较差. 因此本文对该模型进行扩边. 分别考察了三种情况下 CGNR 法向下延拓的精度：①对矩阵 $\mathbf{X}$ 、 $\mathbf{R}$ 、 $\mathbf{P}$ 进行扩边（因其需要同 $\mathbf{A}$ 或 $\mathbf{A}^T$ 相乘，后文用 $\mathbf{V}$ 统称这些矩阵）， $\mathbf{B}$ 不进行扩边；②对 $\mathbf{B}$ 扩边， $\mathbf{V}$ 不扩边；③ $\mathbf{V}$ 、 $\mathbf{B}$ 同时扩边. 其它五种方法不涉及变量 $\mathbf{V}$ ，仅对 $\mathbf{B}$ 扩边. 实验还对比了几种延拓方法的计算耗时和延拓重力异常数据均值的情况.

表 2 计算耗时以循环 100 次计，实验过程中使用的硬件环境：Intel(R) Core(TM) i7-10750H CPU @ 2.60 GHz 2.59 GHz. 由表可知，在未对数据加入噪声的情况下，上述实验方法均保持了良好的延拓精度和计算效率. 其中积分迭代方法的延拓精度较高，计算速度较快. 积分迭代法、Tikhonov 正则化迭代法和 BB 法的最小均方差和平均相对误差相同，且延拓精度较高. 迭代最小二乘法和半迭代 ν 方法的延拓精度稍低.

表 3 为未加入误差的重力异常场向下延拓精度对比，显示对不同变量进行扩边所能达到的最高精度.

表 3 对不同变量进行扩边及延拓精度对比

Table 3 Comparison of the accuracy of edge extension for different variables and downward continuation

扩边对象	最优扩边数	最小均方误差/mGal	最小平均相对误差/mGal	最优循环次数/次
共轭梯度法向残差法				
$\mathbf{V}$	85	0.017	0.189	100
$\mathbf{B}$	300	0.028	0.312	44
$\mathbf{V}+\mathbf{B}$	50	0.019	0.211	100
频率域积分迭代法				
$\mathbf{B}$	100	0.014	0.160	67
Tikhonov正则化迭代法				
$\mathbf{B}$	100	0.014	0.160	67
BB法				
$\mathbf{B}$	100	0.014	0.160	40
迭代最小二乘法				
$\mathbf{B}$	75	0.018	0.203	100
半迭代 ν 方法				
$\mathbf{B}$	200	0.023	0.264	71

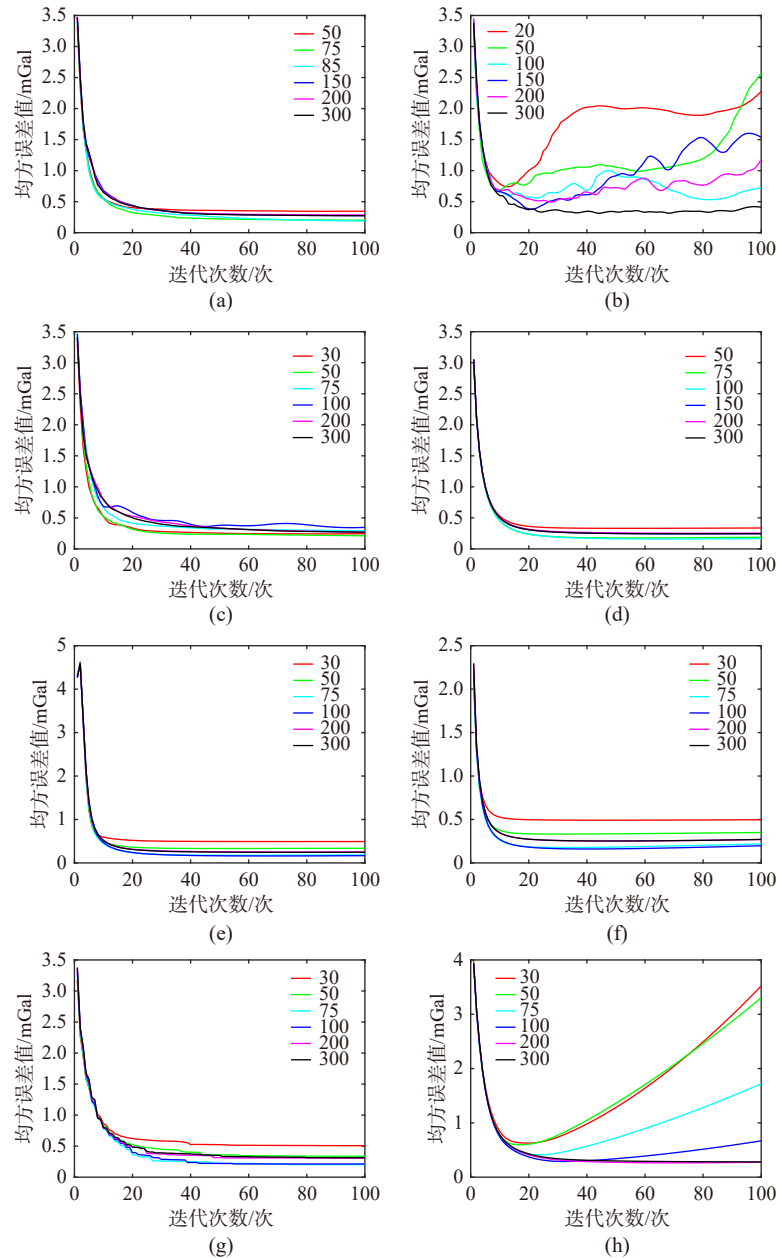


图 1 延拓精度与迭代次数的关系。(a) 共轭梯度法向残差法对 V 扩边, 不同扩边数的均方误差随迭代次数变化情况; (b) 共轭梯度法向残差法对 B 扩边, 不同扩边数的均方误差随迭代次数变化情况; (c) 共轭梯度法向残差法对 V 和 B 扩边, 不同扩边数的均方误差随迭代次数变化情况; (d) 积分迭代法不同扩边数的均方误差随迭代次数变化情况; (e) Tikhonov 正则化迭代法不同扩边数的均方误差随迭代次数变化情况; (f) BB 法不同扩边数的均方误差随迭代次数变化情况; (g) 迭代最小二乘法不同扩边数的均方误差随迭代次数变化情况; (h) 半迭代 v 方法不同扩边数的均方误差随迭代次数变化情况; (i) 选取较好的延拓效果, 对比六种情况均方误差随迭代次数变化情况; (j) 对比六种情况平均相对误差随迭代次数变化情况

Fig. 1 Relationship between continuation accuracy and iteration number. (a) Conjugate gradient normal residual method (CGNR) for V expansion, the mean square error with different expansion numbers as a function of the number of iterations; (b) CGNR for B expansion, the mean square error with different expansion numbers as a function of the number of iterations; (c) CGNR for V and B expansion, the mean square error with different expansion numbers as a function of the number of iterations; (d) Integral iteration method, the mean square error with different expansion numbers as a function of the number of iterations; (e) Tikhonov regularization iteration method, the mean square error with different expansion numbers as a function of the number of iterations; (f) BB method, the mean square error with different expansion numbers as a function of the number of iterations; (g) Iterative least squares method, the mean square error with different expansion numbers as a function of the number of iterations; (h) Semi-iterative method, the mean square error with different expansion numbers as a function of the number of iterations; (i) Selecting the better extrapolation effect, comparing the mean square error as a function of the number of iterations for the six cases; (j) Comparing the average relative error as a function of the number of iterations for the six cases

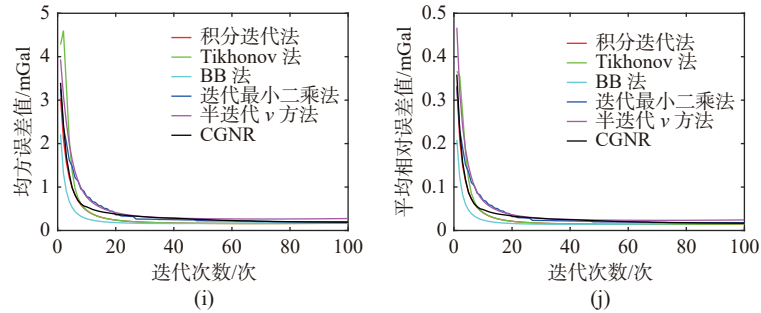


图 1 (续)

Fig. 1 (Continuations)

由图 1、表 3 可见六种延拓方法在没有误差的情况下, BB 法的延拓精度较高, 收敛速度快, 达到稳定精度需要迭代次数较少。

图 2 为模拟重力异常 2 km 和 1 km 高度处的重力场等值线图, 对图 2 中左图向下延拓, 延拓结果同右图进行对比。

图 3 分别为积分迭代法、Tikhonov 正则化迭代法、BB 法、迭代最小二乘法、半迭代 v 方法和 CGNR 法的等值线图。与图 2 中右列图对比可以分析延拓效果均比较良好, 重力异常等值线图分布相似, 保持着良好的延拓效果。

图 4 给出了六种方法的均方误差随迭代次数的变化关系曲线。BB 法的收敛速度最快, 迭代 15 次即呈现了稳定的延拓趋势, 且初始延拓均方误差值较低, 延拓精度较高, 具有非常明显的优势。迭代最小二乘法在延拓过程中, 呈现了阶梯状下降的趋势, 延拓不够稳定。Tikhonov 正则化迭代方法在趋于稳定延拓前, 经过了误差增加的状态, 且初始均方误差值较高, 延拓效果较为一般。

2.3 噪声模型数据的向下延拓分析

为了更真实地模拟实际数据的情况, 在上述无误差模型数据基础上加入噪声, 对比不同延拓方法对误差的抑制作用和延拓效果。对模型数据添加随

机噪声, 分析各种延拓方法的延拓效果, 表 4 为加入噪声 (待延拓数据标准差的 5%) 的重力异常场向下延拓精度对比, 其中 CGNR 法循环 100 次, 积分迭代法、Tikhonov 正则化迭代和 BB 法循环 20 次。图 5 给出了 5% 噪声情况下模拟数据等值线图。

由图 6、表 5 可见六种延拓方法在加入误差的情况下, CGNR 法对 V 扩边的延拓精度较高, 收敛速度快。

加入噪声前后的实验对比, 积分迭代法对于噪声的抑制作用较差。随着迭代次数的增加, 积分迭代法的误差没有呈收敛的趋势。误差达到最小值后会急剧变大, 为了直观显示误差趋势, 迭代截取了前 10 次计算结果。Tikhonov 正则化方法、BB 法也呈大致相同的趋势, 如图 7 所示, 上述三种方法的实验结果等值线图的噪声点分布不集中, 噪声点分布较为杂乱, 误差较大。而在添加噪声的实验中迭代最小二乘法、半迭代 v 方法、CGNR 法具有很好的延拓效果, 平均相对误差和均方误差均呈收敛趋势, 三种方法对误差具有良好的抑制效应, 图中噪声点集中分布在图像边缘, 延拓结果快速准确。由表 5 结果可见, 在 5% 噪声情况下, CGNR 法的延拓精度最高, 且延拓较为稳定, 计算效率最高, 趋于收敛的速度最快, 结果如图 8 所示。

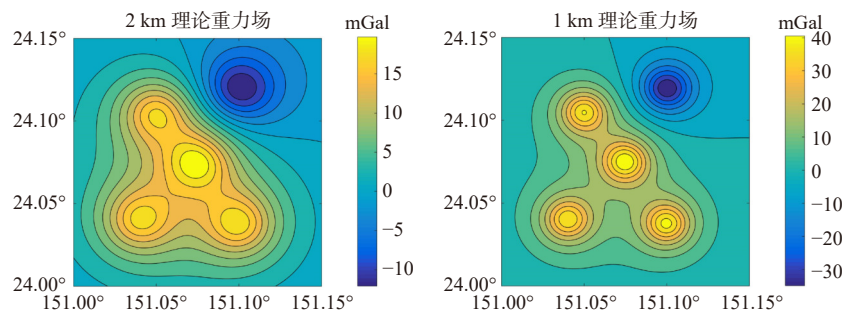


图 2 模拟数据等值线图

Fig. 2 Contour map of simulated data

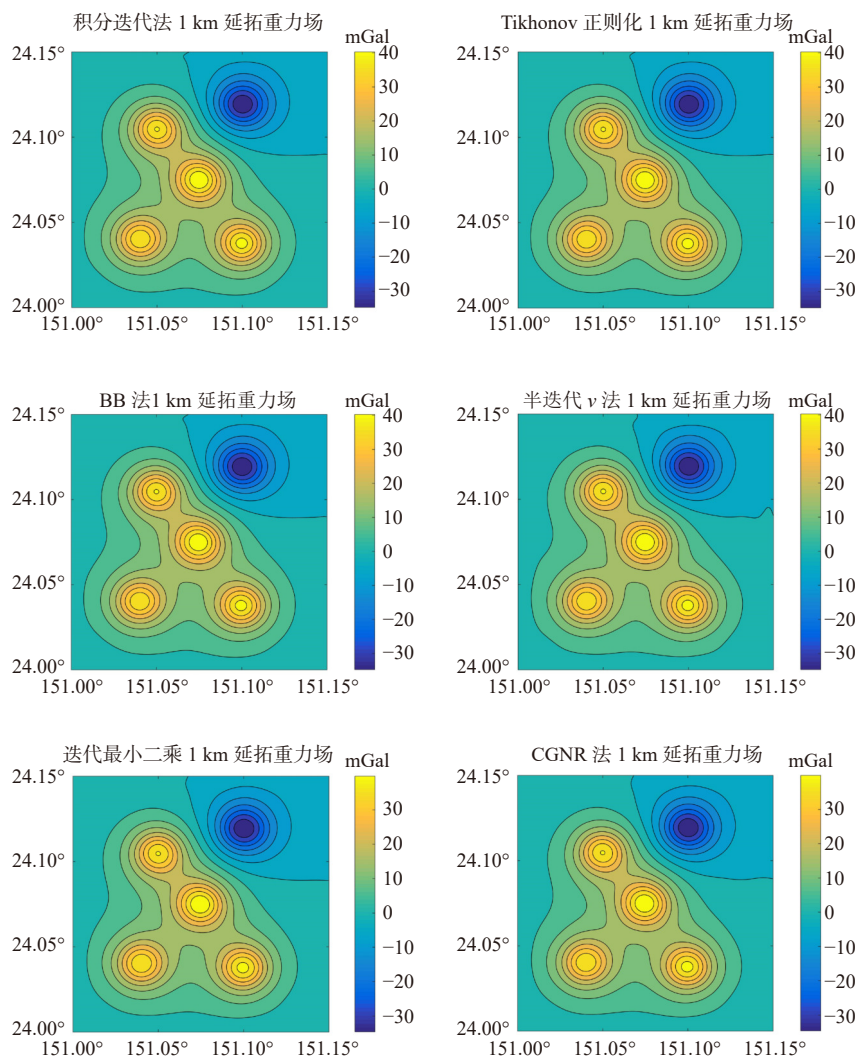


图 3 延拓等值线图

Fig. 3 Downward continuation contour map

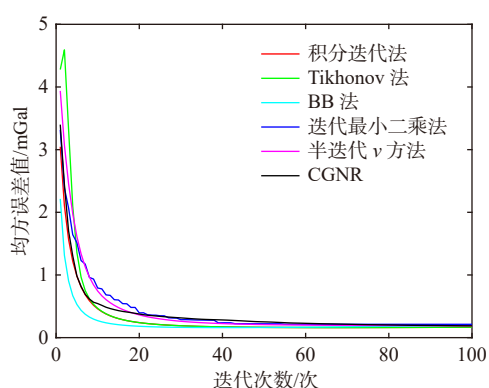


图 4 延拓精度与迭代次数的关系

Fig. 4 Relationship between continuation accuracy and iteration number

结合加入误差前后的实验情况, 可以分析得到迭代最小二乘法、半迭代 v 方法、CGNR 法均保持了良好的延拓情况, 其中 CGNR 法的延拓情况最为平稳, 趋于稳定速度快, 且延拓精度最高. 由延拓等值线图可以分析, CGNR 法对噪声的抑制效应

更好, 误差分布较为集中. 由于实际数据是存在噪声的, 因此理论上在后续使用实际数据进行重力数据向下延拓的过程中, 采用迭代最小二乘法、半迭代 v 方法和 CGNR 法三种方法, 能得到更好的延拓效果.

以 CGNR 法为例, 图 9 对比加入不同噪声情况下, 均方误差随迭代次数的变化情况. 由图可以看出随着噪声的逐渐加大, 趋于稳定的均方误差值也逐渐增大, 但整体都能保持着良好的收敛效果和延拓精度, CGNR 法对噪声的抑制效应显著.

3 实际重力数据实验与分析

实际航空重力数据位于北美洲, 测区整体呈长方形. 测区航空重力数据、地面重力数据分布的角点坐标如表 6 所示.

观测的航空重力数据由横向和纵向航线组成, 测区平均飞行高度在 5 500 m 左右, 该区域地面平

表 4 噪声为 5% 的向下延拓精度对比

Table 4 Comparison of the accuracy of downward continuation with 5% noise added

扩边对象	最优扩边数	最小平均相对误差/mGal	最小均方误差/mGal	最优循环次数/次
共轭梯度法向残差法				
V	85	0.030	0.341	62
B	300	0.044	0.498	22
$V+B$	50	0.041	0.467	19
频率域积分迭代法(迭代20次)				
B	75	0.139	1.530	5
Tikhonov正则化迭代法(迭代20次)				
B	50	0.142	1.620	6
BB法(迭代20次)				
B	100	0.132	1.472	3
迭代最小二乘法				
B	75	0.032	0.356	40
半迭代 v 方法				
B	100	0.034	0.383	29

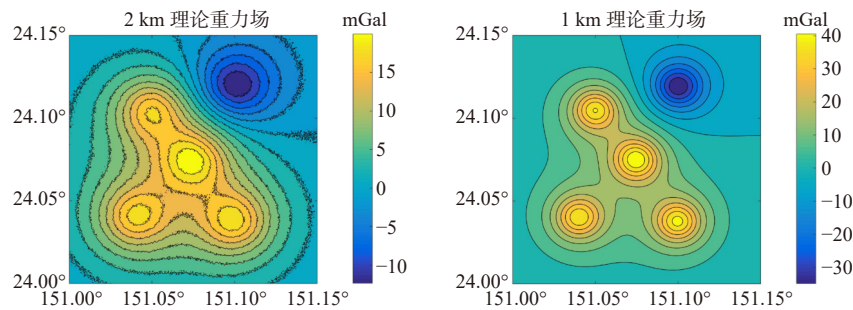


图 5 5% 噪声情况下模拟数据等值线图

Fig. 5 Contour map of simulated data under a 5% noise condition

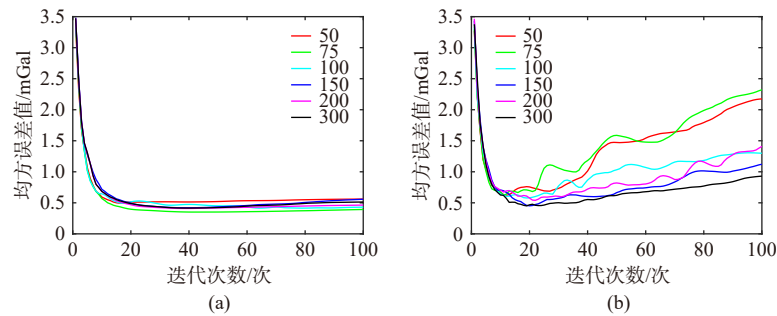


图 6 延拓精度与迭代次数的关系 (噪声为 5%)。 (a) 共轭梯度法向残差法对 V 扩边, 不同扩边数的均方误差随迭代次数变化情况; (b) 共轭梯度法向残差法对 B 扩边, 不同扩边数的均方误差随迭代次数变化情况; (c) 共轭梯度法向残差法对 V 和 B 扩边, 不同扩边数的均方误差随迭代次数变化情况; (d) 积分迭代法不同扩边数的均方误差随迭代次数变化情况; (e) Tikhonov 正则化迭代法不同扩边数的均方误差随迭代次数变化情况; (f) BB 法不同扩边数的均方误差随迭代次数变化情况; (g) 迭代最小二乘法不同扩边数的均方误差随迭代次数变化情况; (h) 半迭代 v 方法不同扩边数的均方误差随迭代次数变化情况; (i) 选取较好的延拓效果, 对比六种情况均方误差随迭代次数变化情况; (j) 对比六种情况平均相对误差随迭代次数变化情况

Fig. 6 Relationship between continuation accuracy and iteration number (5% noise). (a) Conjugate gradient normal residual method (CGNR) for V expansion, the mean square error with different expansion numbers as a function of the number of iterations; (b) CGNR for B expansion, the mean square error with different expansion numbers as a function of the number of iterations; (c) CGNR for V and B expansion, the mean square error with different expansion numbers as a function of the number of iterations; (d) Integral iteration method, the mean square error with different expansion numbers as a function of the number of iterations; (e) Tikhonov regularization iteration method, the mean square error with different expansion numbers as a function of the number of iterations; (f) BB method, the mean square error with different expansion numbers as a function of the number of iterations; (g) Iterative least squares method, the mean square error with different expansion numbers as a function of the number of iterations; (h) Semi-iterative method, the mean square error with different expansion numbers as a function of the number of iterations; (i) Selecting the better extrapolation effect and comparing the mean square error as a function of the number of iterations for the six cases; (j) Comparing the average relative error as a function of the number of iterations for the six cases

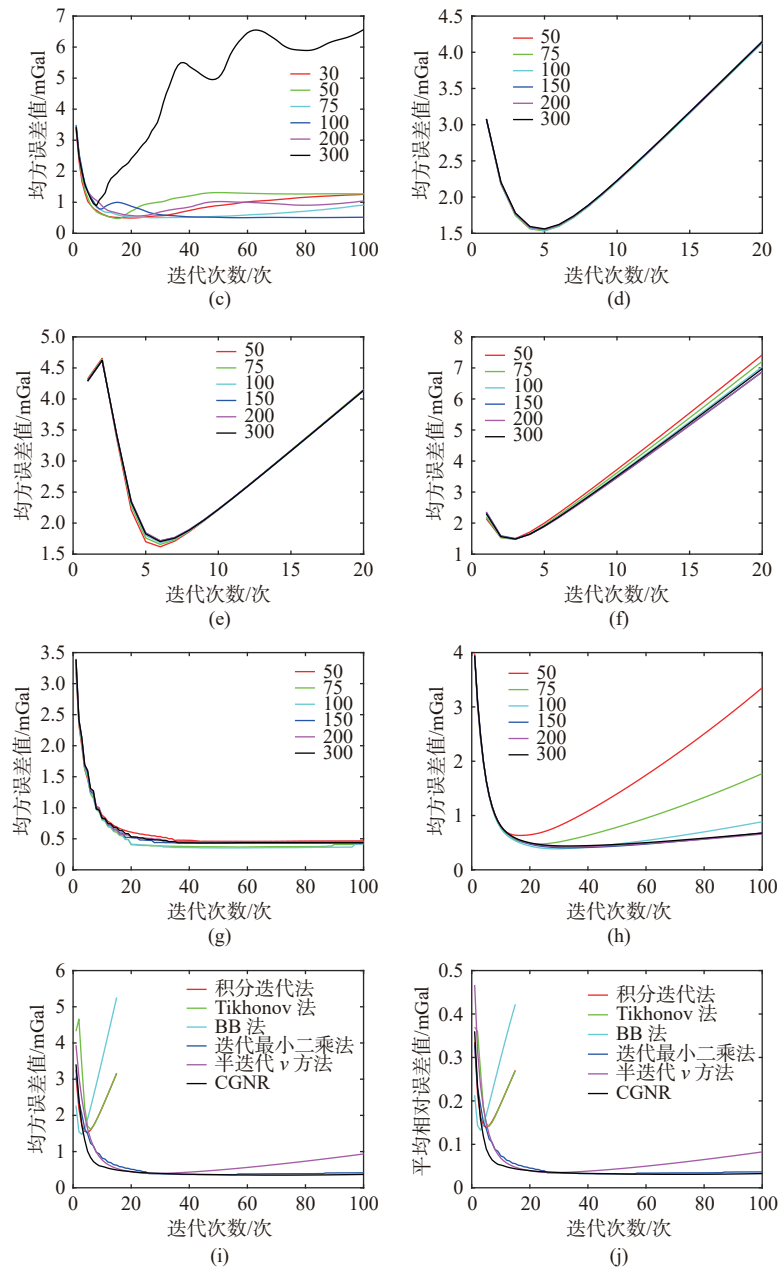


图 6 (续)

Fig. 6 (Continuations)

表 5 5% 噪声情况下的延拓计算耗时及精度对比

Table 5 Comparison of time and accuracy of extension calculation under 5% noise

延拓方法	计算耗时/ms	最小平均 相对误差/mGal	最小均方 误差/mGal	航空重力 异常数据均值/mGal	地面重力 异常数据均值/mGal	延拓重力 异常数据均值/mGal
积分迭代法	5180	0.140	1.533	6.140	7.154	7.234
Tikhonov正则化迭代	9981	0.148	1.687	6.141	7.154	7.243
BB法	5458	0.133	1.474	6.140	7.154	7.183
迭代最小二乘法	11683	0.033	0.368	6.140	7.154	7.203
半迭代 ν 方法	10372	0.033	0.373	6.141	7.154	7.193
共轭梯度法向残差法	8780	0.032	0.363	6.143	7.154	7.132

均高度在 1500 m 左右, 即需要向下延拓 4000 m 左右. 向下延拓深度在 30 倍点距以内, 即重力数据

向下延拓格网总点数为 200×200 . 实际数据区域范围如表 6 所示, 观测阶段飞行高度平稳, 能够满足

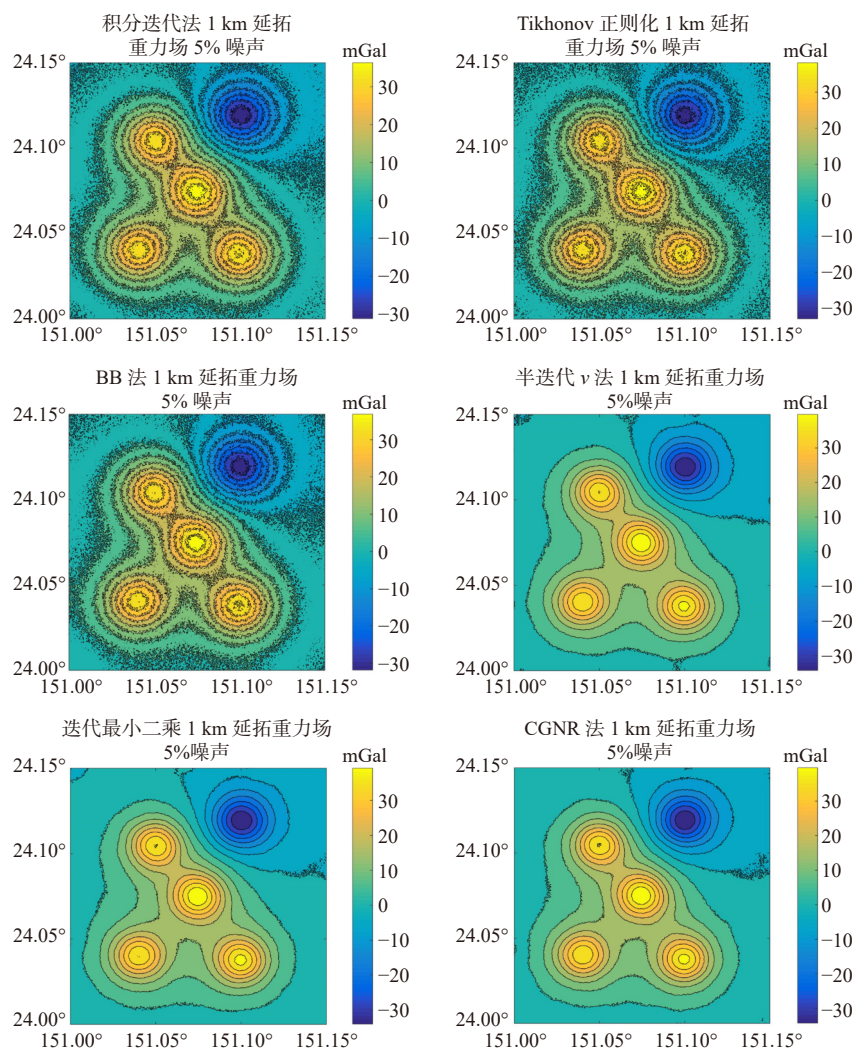


图 7 延拓等值线图

Fig. 7 Downward continuation contour map

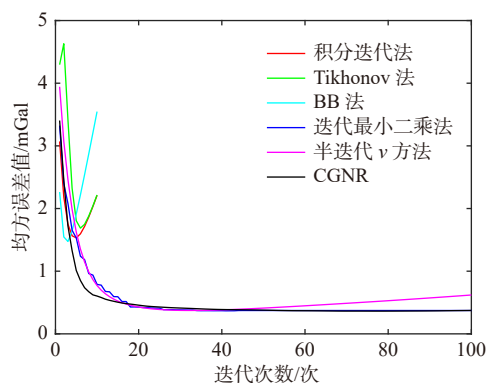


图 8 不同延拓方法延拓精度与迭代次数的关系

Fig. 8 Relation between accuracy and iteration number of different continuation methods

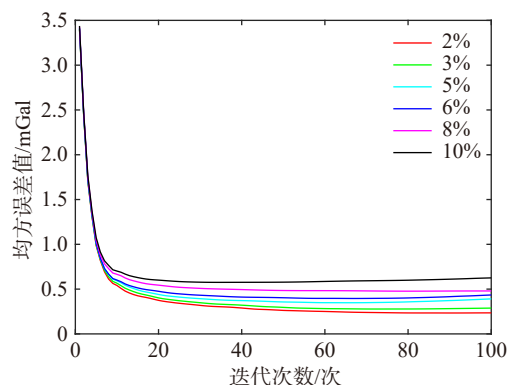


图 9 延拓精度与迭代次数的关系

Fig. 9 Relation between continuation accuracy and number of iterations

向下延拓数据要求. 此外, 在对航空重力数据延拓前应进行高度改正, 使其位于同一高度面上. 为此, 进行了正常重力值的计算, 得到重力扰动值, 再经过大地水准面高改正得到重力异常值.

图 10 为经过航空重力数据预处理并格网化之后的航空重力异常和地面重力异常等值线图. 该区域整体趋势呈现西南地区重力异常值较大, 东北地区重力异常值偏小且实验区内重力异常变化较为平缓.

表 6 实验区角点的经纬度坐标

Table 6 Longitude and latitude coordinates of corner points in the experimental area

纬度/(°)	经度/(°)
37.500	-104.800
37.500	-103.200
38.400	-104.800
38.400	-103.200

采用上述六种方法对图 10 左图中航空重力异常实际数据向下延拓, 各个方法的延拓情况如图 11 所示, 延拓结果对比右侧地面重力异常数据。

表 7 给出了实际数据向下延拓结果, 几种方法均能实现航空重力向下延拓。在六种延拓方法中, 积分迭代法的计算效率最高, 但精度最低, BB 法、

Tikhonov 正则化迭代法和迭代最小二乘法延拓精度稍低, 且三种方法的延拓结果图中, 均有一定的阶梯状压缩, 整体延拓不够平滑, 没能很好地反映地面重力异常情况。半迭代 ν 方法具有较高的延拓精度且计算效率较高。CGNR 法可以保持良好的延拓精度, 且整体保持良好的延拓平滑程度和延拓稳定性。相比于其他方法几种, CGNR 法的计算效率优势不明显。分析表明, CGNR 法在迭代处理中多涉及到带有系数矩阵 A 的 $AX=B$ 计算, 如 $AX^{(0)}$ 、 $A^T R^{(0)}$ 、 $AP^{(0)}$ 等, 由此导致了频率域的效率降低。

4 总 结

本文从向下延拓的基本原理出发, 使用共轭梯度法向残差法 (CGNR 法)、频率域积分迭代法、

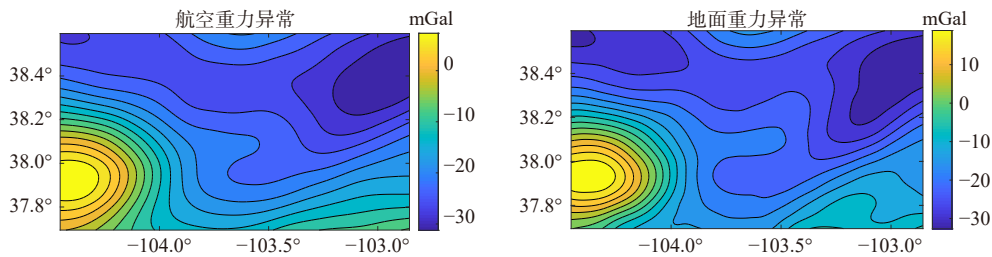


图 10 航空和地面实际重力数据等值线图

Fig. 10 Contour map of airborne and ground gravity data

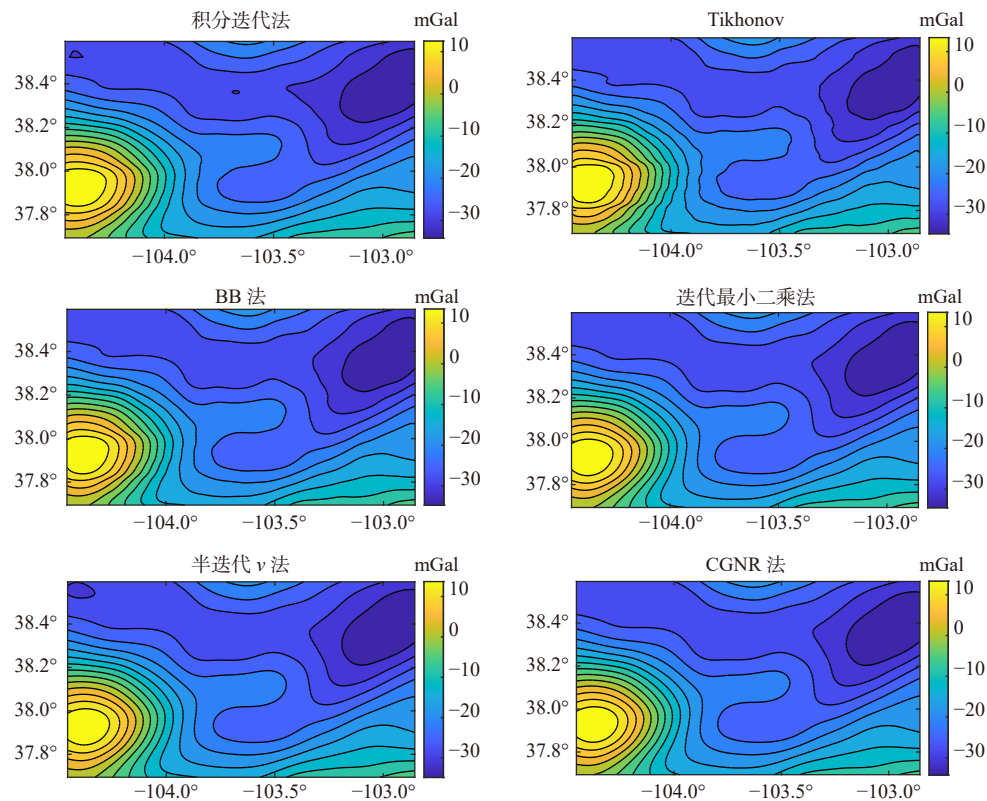


图 11 延拓等值线图

Fig. 11 Extension contour map

表 7 实际数据延拓计算耗时及精度对比

Table 7 Comparison of calculation time and accuracy of actual data extension

迭代方法	计算耗时/ms	最小平均 相对误差/mGal	最小均方 误差/mGal	航空重力 异常数据均值/mGal	地面重力 异常数据均值/mGal	延拓重力 异常数据均值/mGal
积分迭代法	2088	0.257	2.829	-18.150	-16.415	-18.673
Tikhonov正则化迭代	4290	0.251	2.814	-18.150	-16.415	-18.774
BB法	5080	0.251	2.813	-18.150	-16.415	-18.772
迭代最小二乘法	4423	0.250	2.811	-18.150	-16.415	-18.769
半迭代 ν 方法	3721	0.244	2.786	-18.150	-16.415	-18.773
共轭梯度法向残差法	7501	0.248	2.753	-18.150	-16.415	-18.649

Tikhonov 正则化迭代法、Barzilai-Borwein 法、迭代最小二乘法和半迭代 ν 方法六种延拓方法向下延拓, 分别对模拟数据和实际航空重力数据延拓, 对比各个延拓方法的特性。

(1) 根据空间域位场向下延拓公式可知, 在空间域进行向下延拓计算的耗时较多, 因此, 将空间域的向下延拓转化至频率域进行计算, 显著提高向下延拓的计算效率。

(2) 模拟数据中, 各方法延拓精度、计算效率等均相差不大, 且均具有良好的稳健性, 其中 Barzilai-Borwein 法的延拓误差收敛最快, 延拓精度也较高。对模拟数据加入 5% 的噪声后, 积分迭代法、Tikhonov 正则化方法和 BB 法呈大致相同的趋势, 抗噪效果不佳, 误差先减小后呈发散趋势, 延拓不稳定。而噪声实验中迭代最小二乘法、半迭代 ν 方法、CGNR 法保持了很好的延拓效果, 等值线图的噪声点分布集中, 较为平滑; 平均相对误差和均方误差均呈收敛趋势, 说明其对噪声具有良好的抑制效应。

(3) 模拟实验中, CGNR 法的延拓精度较高, 对噪声的抑制效应较好, 在实际数据延拓中, 延拓稳定且延拓精度高, 但其计算效率较低。但是使用频率域的延拓方法将这一劣势的影响降低, 在对 200×200 的矩阵向下延拓实验中, CGNR 法耗时低于 10000 ms。由此可见, CGNR 法在处理航空重力数据向下延拓的问题时具有延拓精度高、延拓稳健性强、收敛速度较快的优点, 具有一定优越性。

References

- Brakhage H. 1987. On Ill-posed Problems and Method of Conjugate Gradients[M]// Engl H W, Groetsch C W. Inverse and Ill-posed Problems. Qrlando: Academic Press, 165-175.
- Chen L W, Zhang H, Zheng Z Q, et al. 2007. Technique of geomagnetic field continuation in underwater geomagnetic aided navigation[J]. *Journal of Chinese Inertial Technology*, 15(6): 693-697 (in Chinese).
- Chen L W, Xu S Z, Hu X P, et al. 2011. The iterative Least Square method for downward continuation of potential fields[J]. *Progress in Geophysics*, 26(3): 894-901 (in Chinese).
- Chen X, Zhai G J, Bao J Y, et al. 2018. Least squares collocation Tikhonov regularization method for the downward continuation of airborne gravity data[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 43(4): 578-585 (in Chinese).
- Feng S P, Gao Y M. 2016. Downward continuation of airborne gravity measurement data based on iterative Tikhonov regularization method[J]. *Geospatial Information*, 14(10): 53-55 (in Chinese).
- Hou Z C. 1982. The downward continuation method of the frequency domain of potential field[J]. *Geophysical and Geochemical Exploration*, 6(1): 33-40 (in Chinese).
- Huang M T, Deng K L, Wu T Q, et al. 2022. Rigorous modification model of upward continuation and its applications on the downward continuation of gravity anomaly[J]. *Ploidy Acta Geodaetica et Cartographica Sinica*, 51(1): 41-52 (in Chinese).
- Jekeli C. 1981. The Downward Continuation to the Earth's Surface of Truncated Spherical and Ellipsoidal Harmonic Series of the Gravity and Height Anomalies[M]. The Ohio State University.
- Kern M, Schwarz K P, Sneeuw N. 2003. A study on the combination of satellite, airborne, and terrestrial gravity data[J]. *Journal of Geodesy*, 77: 217-225.
- Li C G, Xu C X. 2001. An adaptive CGNR algorithm for solving large linear equations[J]. *Chinese Journal of Engineering Mathematics*, 18(3): 71-77 (in Chinese).
- Liu D J, Hong T Q, Jia Z H, et al. 2009. Wave number domain iteration method for downward continuation of potential fields and its convergence[J]. *Chinese Journal of Geophysics*, 52(6): 1599-1605 (in Chinese).
- Liu X G, Sun Z M, Guan B, et al. 2018. Downward continuation of airborne gravimetry data based on improved Poisson integral iteration method[J]. *Acta Geodaetica et Cartographica Sinica*, 47(9): 1188-1195 (in Chinese).
- Nachtigal N M, Reddy S C, Trefethen L N. 1992. How fast are nonsymmetric matrix iterations[J]. *Siam Journal on Matrix Analysis and Applications*, 13: 778-795.
- Pitónák M, Novák P, Eshagh M, et al. 2020. Downward continuation of gravitational field quantities to an irregular surface by spectral weighting[J]. *Journal of Geodesy*, 94(7): 1-26.
- Saad Y. 1988. Preconditioning techniques for nonsymmetric and indefi-

- nite linear systems[J]. *Computational & Applied Mathematics*, 24: 89-105.
- Saad Y. 1996. *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*[M]. Boston, USA: PWS Publishing Company.
- Saylor P E, Smolarski D C. 1991. Implementation of an adaptive algorithm for Richardson's method[J]. *Linear Algebra and its Applications*, 154-156: 615-646.
- Sjöberg L E. 2003. A solution to the downward continuation effect on the geoid determined by Stokes' formula[J]. *Journal of Geodesy*, 77: 94-100.
- Wu F F, Huang H J, Ren Q Y, et al. 2020. Analysis of downward continuation model of airborne gravity based on comprehensive semi-parametric kernel estimation and regularization method[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 45(10): 1563-1569 (in Chinese).
- Xiao T Y, Yu S G, Wang Y F. 2003. *Numerical Solution of the Inverse Problem*[M]. Beijing: Science Press (in Chinese).
- Xu S Z. 2006. The integral-iteration method for continuation of potential fields[J]. *Chinese Journal of Geophysics*, 49(4): 1176-1182 (in Chinese).
- Xu X Q, Zhao J. 2020. A multi-parameter regularization method in downward continuation for airborne gravity data[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 45(7): 956-963, 973 (in Chinese).
- Zhang Z H. 2013. *Numerical computation method of downward continuation of potential fields*[D]. Hangzhou: Zhejiang University (in Chinese).
- Zhang Z H, Liao X L, Yao Y, et al. 2021. Coefficient matrix properties of downward continuation for potential fields and Barzilai-Borwein downward continuation method[J]. *Journal of Southwest Jiaotong University*, 56(2): 323-330, 362 (in Chinese).
- Zhao Y F, Ke B G. 2022. Downward continuation of gravity anomaly at conjugate gradient normal residual method[J]. *Science of Surveying and Mapping*, 47(10): 29-38 (in Chinese).
- Zhou H, Luo Z C, Zhou Z B, et al. 2022. Progress of temporal gravity field model determination in terms of spherical harmonic coefficients via satellite-to-satellite tracking observations[J]. *Reviews of Geophysics and Planetary Physics*, 53(3): 243-256 (in Chinese).
- ## 附中文参考文献
- 陈龙伟, 张辉, 郑志强, 等. 2007. 水下地磁辅助导航中地磁场延拓方法[J]. *中国惯性技术学报*, 15(6): 693-697.
- 陈龙伟, 徐世浙, 胡小平, 等. 2011. 位场向下延拓的迭代最小二乘法[J]. *地球物理学进展*, 26(3): 894-901.
- 陈欣, 翟国君, 暴景阳, 等. 2018. 航空重力向下延拓的最小二乘配置 Tikhonov 正则化法[J]. *武汉大学学报(信息科学版)*, 43(4): 578-585.
- 冯淑萍, 高延民. 2016. 航空重力数据向下延拓的迭代 Tikhonov 正则化法[J]. *地理空间信息*, 14(10): 53-55.
- 侯重初. 1982. 位场的频率域向下延拓方法[J]. *物探与化探*, 6(1): 33-40.
- 黄涛涛, 邓凯亮, 吴太旗, 等. 2022. 重力异常向上延拓严密改化模型及向下延拓应用[J]. *测绘学报*, 51(1): 41-52.
- 李春光, 徐成贤. 2001. 一个求解大型线性方程组的自适应 CGNR 算法[J]. *工程数学学报*, 18(3): 71-77.
- 刘东甲, 洪天求, 贾志海, 等. 2009. 位场向下延拓的波数域迭代法及其收敛性[J]. *地球物理学报*, 52(6): 1599-1605.
- 刘晓刚, 孙中苗, 管斌, 等. 2018. 航空重力测量数据向下延拓的改进 Poisson 积分迭代法[J]. *测绘学报*, 47(9): 1188-1195.
- 伍丰丰, 黄海军, 任青阳, 等. 2020. 综合半参数核估计与正则化方法的航空重力向下延拓模型分析[J]. *武汉大学学报(信息科学版)*, 45(10): 1563-1569.
- 肖庭延, 于慎根, 王彦飞. 2003. *反问题的数值解法*[M]. 北京: 科学出版社.
- 徐世浙. 2006. 位场延拓的积分-迭代法[J]. *地球物理学报*, 49(4): 1176-1182.
- 徐新强, 赵俊. 2020. 航空重力向下延拓的多参数正则化方法[J]. *武汉大学学报(信息科学版)*, 45(7): 956-963, 973.
- 张志厚. 2013. 位场向下延拓的数值计算方法[D]. 杭州: 浙江大学.
- 张志厚, 廖晓龙, 姚禹, 等. 2021. 位场向下延拓系数矩阵性质及 Barzilai-Borwein 向下延拓法[J]. *西南交通大学学报*, 56(2): 323-330, 362.
- 赵予菲, 柯宝贵. 2022. 共轭梯度法向残差法重力异常向下延拓研究[J]. *测绘科学*, 47(10): 29-38.
- 周浩, 罗志才, 周泽兵, 等. 2022. 利用卫星跟踪卫星观测数据确定时变重力场球谐解的发展趋势[J]. *地球与行星物理评论*, 53(3): 243-256.